

# 流體在管線中的摩擦係數簡化計算法

張榮興

## 摘要

試算表程式撰寫容易，在工程應用上已經越來越普遍。在流體輸送問題計算上，常需計算的壓力差、管徑、流量、流速等，工程師更常使用試算表作運算。但其中一項重要參數—摩擦係數，工程師通常使用查圖估算。本文根據 Colebrook and White 的摩擦係數一般方程式，及 Manadili 的二項簡化式，提出一修正的簡化經驗式

$$f = \frac{1}{\left\{ -2 \times \log \left[ \frac{95.00 / \text{Re}^{0.983} - 96.82 / \text{Re}}{1 + \frac{1}{6} \text{Re}^{1/3} (\varepsilon / D)^{2/3}} + \frac{\varepsilon / D}{3.7} \right] \right\}^2}$$

此方程式中只含雷諾數及管線粗糙度，適合使用試算表快速且準確的計算求得摩擦係數值，其計算誤差在±0.5%以內。文中並建立運算邏輯，可以簡單且正確的計算摩擦係數及管線內流動問題之計算。

註：本文程式及圖表檔案歡迎來信索取。E-mail: resi1689@giga.net.tw

## 紊流摩擦係數經驗式

流體流動相關計算是工程領域中最基本的運算，根據普朗特(Prandtl)的邊界層理論，摩擦係數可以表示成  $Re\sqrt{f}$  的函數 [1]。例如，Colebrook and White 提出的摩擦係數一般方程式 [2] 為

$$f = 1/\left\{-2 \times \log\left[\frac{2.51}{Re\sqrt{f}} + \frac{(\varepsilon/D)}{3.7}\right]\right\}^2 \quad (1)$$

化學工程單元操作教科書及化學工程師手冊多根據此一方程式製作圖表，供計算時查圖使用。由於方程式(1)為  $f$  的隱函數，針對特定雷諾數  $Re$  及粗糙度  $\varepsilon/D$ ，需要利用數值解法才能求解摩擦係數  $f$ 。在撰寫程式求解方程式(1)時，可以先定義一個變數  $K_f = 1/\sqrt{f}$ ，並將方程式(1)改寫成

$$F(K_f) = \frac{2.51}{Re} K_f - 10^{-\frac{1}{2}K_f} + \frac{(\varepsilon/D)}{3.7} = 0 \quad (2)$$

方程式(2)為含有  $K_f$  之非線性方程式。針對特定雷諾數  $Re$  及粗糙度  $\varepsilon/D$ ，求解方程式(2)時，可以利用牛頓割線法得到  $K_{f,j+1} = K_{f,j} - F(K_{f,j})/F'(K_{f,j})$ ，其中  $K_{f,j}$  為第  $j$  次計算值(詳見張榮興[3])；於得到收斂結果後，求得摩擦係數  $f = 1/K_f^2$ 。

而為了撰寫試算表程式(例如 Microsoft Excel)方便起見，Swamee and Jain 提出一項簡化方程式 [4]

$$f = [-2 \times \log(5.74/Re^{0.9})]^{-2} \quad (3)$$

Manadili [5] 則利用  $f(x) = C_1 + C_2 X^n + C_3 X^m$  的型式，提出適用於紊流區的簡化方程式，

$$f = 1/\left\{-2 \times \log\left[\frac{95.00}{Re^{0.983}} - \frac{96.82}{Re} + \frac{(\varepsilon/D)}{3.7}\right]\right\}^2 \quad (4)$$

表 1 為各種簡化方程式計算結果與方程式(1)所得結果之比較，表中  $f_s$  是利用數值方法解方程式(1)所得結果， $f_m$  是利用 Manadili 簡化方程式(4)所得結果， $f_r$  是利用本文修正簡化方程式(5)所得結果， $f_{sj}$  是利用方程式(3)所得結果。一般而言，Swamee and Jain 的簡化方程式(3)與 Manadili 的簡化方程式(4)在光滑管情況下均適用。方程式(4)對於光滑管能獲得相當準確摩擦係數  $f$ 。但是當管線粗糙度較高時，方程式(4)即產生明顯的系統性誤差。

## 紊流摩擦係數經驗式的修正

圖 1 為利用方程式(1)計算所得摩擦係數與雷諾數之關係，建立方程式(1)中  $2.51/Re\sqrt{f}$  與雷諾數  $Re$  之關係。由圖中可見， $2.51/Re\sqrt{f}$  除了是  $Re$  的函數外，與粗糙度亦有函數關係。當粗糙度  $\varepsilon/D$  由 0 增大時，斜率由  $\varepsilon/D = 0$  時的近似 -0.9，變成當  $\varepsilon/D = 0.05$  時斜率為 -1.0。當  $\varepsilon/D = 0$  時，斜率為 -0.9，與方程式(3)一致。圖 2 為利用 Manadili 的簡化方程式計算結果與方程式(1)所得結果之比較，由圖中可發現當粗糙度較高或雷諾數較小時，方程式(3)計算所得結果誤差即較大。



表 1 簡化方程式計算所得結果比較

|    | $\epsilon/D$ | Re       | $f_g$       | $f_s$       | Err(fs) | $f_r$       | Err(fr) | $f_{sj}$    | Err(fsj) |
|----|--------------|----------|-------------|-------------|---------|-------------|---------|-------------|----------|
| 1  | 5.0E-02      | 1.00E+04 | 7.38013E-02 | 7.50118E-02 | 1.64%   | 7.38737E-02 | 0.10%   | 3.09721E-02 | -58.03%  |
| 2  | 5.0E-02      | 1.00E+05 | 7.17809E-02 | 7.20102E-02 | 0.32%   | 7.17728E-02 | -0.01%  | 1.78626E-02 | -75.12%  |
| 3  | 5.0E-02      | 1.00E+06 | 7.15738E-02 | 7.16081E-02 | 0.05%   | 7.15680E-02 | -0.01%  | 1.16065E-02 | -83.78%  |
| 4  | 5.0E-02      | 1.00E+07 | 7.15530E-02 | 7.15576E-02 | 0.01%   | 7.15518E-02 | 0.00%   | 8.14235E-03 | -88.62%  |
| 5  | 5.0E-02      | 1.00E+08 | 7.15509E-02 | 7.15515E-02 | 0.00%   | 7.15507E-02 | 0.00%   | 6.02589E-03 | -91.58%  |
| 6  | 1.0E-03      | 1.00E+04 | 3.23818E-02 | 3.25838E-02 | 0.62%   | 3.22699E-02 | -0.35%  | 3.09721E-02 | -4.35%   |
| 7  | 1.0E-03      | 1.00E+05 | 2.21745E-02 | 2.24148E-02 | 1.08%   | 2.22344E-02 | 0.27%   | 1.78626E-02 | -19.45%  |
| 8  | 1.0E-03      | 1.00E+06 | 1.99435E-02 | 2.00373E-02 | 0.47%   | 1.99789E-02 | 0.18%   | 1.16065E-02 | -41.80%  |
| 9  | 1.0E-03      | 1.00E+07 | 1.96671E-02 | 1.96850E-02 | 0.09%   | 1.96715E-02 | 0.02%   | 8.14235E-03 | -58.60%  |
| 10 | 1.0E-03      | 1.00E+08 | 1.96386E-02 | 1.96413E-02 | 0.01%   | 1.96387E-02 | 0.00%   | 6.02589E-03 | -69.32%  |
| 11 | 1.0E-04      | 1.00E+04 | 3.10372E-02 | 3.10602E-02 | 0.07%   | 3.09839E-02 | -0.17%  | 3.09721E-02 | -0.21%   |
| 12 | 1.0E-04      | 1.00E+05 | 1.85139E-02 | 1.85696E-02 | 0.30%   | 1.85024E-02 | -0.06%  | 1.78626E-02 | -3.52%   |
| 13 | 1.0E-04      | 1.00E+06 | 1.34414E-02 | 1.35338E-02 | 0.69%   | 1.34869E-02 | 0.34%   | 1.16065E-02 | -13.65%  |
| 14 | 1.0E-04      | 1.00E+07 | 1.21661E-02 | 1.22085E-02 | 0.35%   | 1.21917E-02 | 0.21%   | 8.14235E-03 | -33.07%  |
| 15 | 1.0E-04      | 1.00E+08 | 1.19991E-02 | 1.20076E-02 | 0.07%   | 1.20034E-02 | 0.04%   | 6.02589E-03 | -49.78%  |
| 16 | 1.0E-05      | 1.00E+04 | 3.08984E-02 | 3.09005E-02 | 0.01%   | 3.08836E-02 | -0.05%  | 3.09721E-02 | 0.24%    |
| 17 | 1.0E-05      | 1.00E+05 | 1.80438E-02 | 1.80509E-02 | 0.04%   | 1.80348E-02 | -0.05%  | 1.78626E-02 | -1.00%   |
| 18 | 1.0E-05      | 1.00E+06 | 1.18695E-02 | 1.18949E-02 | 0.21%   | 1.18781E-02 | 0.07%   | 1.16065E-02 | -2.22%   |
| 19 | 1.0E-05      | 1.00E+07 | 8.99571E-03 | 9.04124E-03 | 0.51%   | 9.02773E-03 | 0.36%   | 8.14235E-03 | -9.49%   |
| 20 | 1.0E-05      | 1.00E+08 | 8.18756E-03 | 8.21061E-03 | 0.28%   | 8.20534E-03 | 0.22%   | 6.02589E-03 | -26.40%  |
| 21 | 0.0E+00      | 1.00E+04 | 3.08830E-02 | 3.08827E-02 | 0.00%   | 3.08827E-02 | 0.00%   | 3.09721E-02 | 0.29%    |
| 22 | 0.0E+00      | 1.00E+05 | 1.79898E-02 | 1.79907E-02 | 0.00%   | 1.79907E-02 | 0.00%   | 1.78626E-02 | -0.71%   |
| 23 | 0.0E+00      | 1.00E+06 | 1.16450E-02 | 1.16516E-02 | 0.06%   | 1.16516E-02 | 0.06%   | 1.16065E-02 | -0.33%   |
| 24 | 0.0E+00      | 1.00E+07 | 8.10267E-03 | 8.11363E-03 | 0.14%   | 8.11363E-03 | 0.14%   | 8.14235E-03 | 0.49%    |
| 25 | 0.0E+00      | 1.00E+08 | 5.94047E-03 | 5.95377E-03 | 0.22%   | 5.95377E-03 | 0.22%   | 6.02589E-03 | 1.44%    |

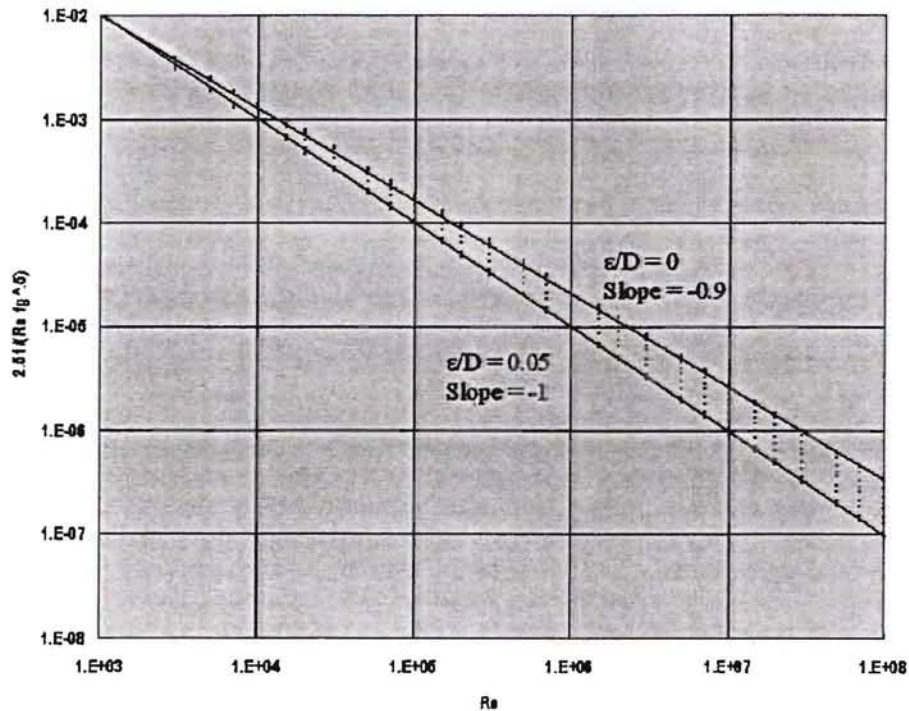


圖 1  $2.51/Re\sqrt{f_g}$  與雷諾數之關係

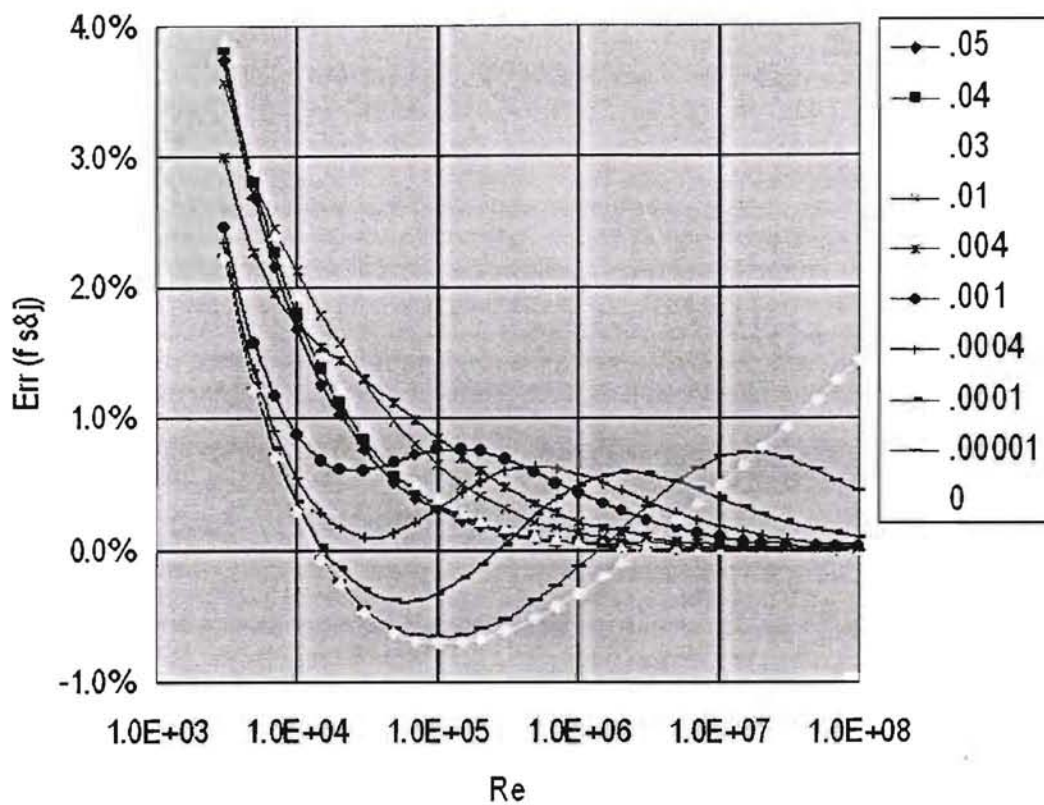


圖 2 方程式(3)計算所得摩擦係數計算誤差與雷諾數關係，圖中標記為粗糙度 $\epsilon/D$ 。

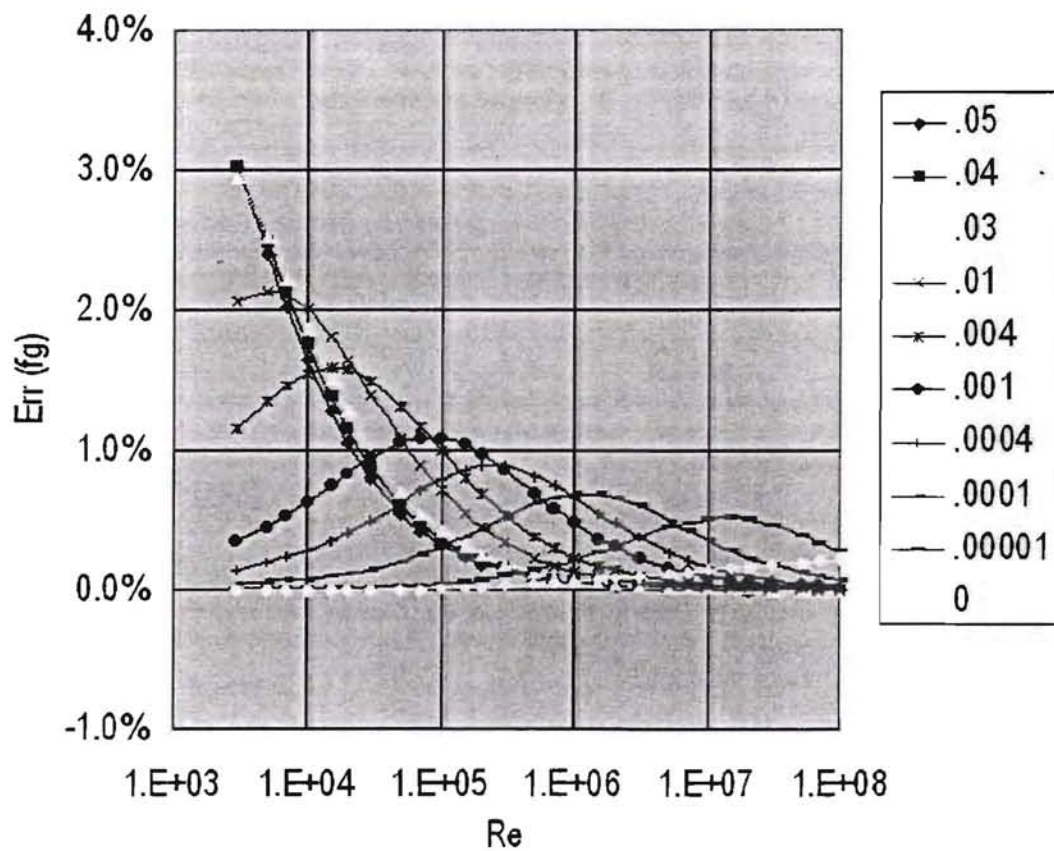


圖 3 方程式(4)計算所得摩擦係數計算誤差與雷諾數關係，圖中標記為粗糙度 $\epsilon/D$ 。



比較圖 2 與圖 3 可以發現，當 $\epsilon/D=0$ 時，Manadili 的經驗式誤差極小( $< 0.22\%$ )，而 Swamee & Jain 的經驗式誤差則在 $-1\% \sim +2\%$ 間。粗糙度大時，二者誤差接近，且在  $Re$  較小時，其誤差均較大。由於方程式(4)對於光滑管及雷諾數  $Re$  較大時，均極為準確；但是在粗糙度高及雷諾數較小時，其誤差較大。經分析計算結果，提出修正式模式如下

$$f = \frac{1}{\{-2 \times \log\left[\frac{95.00/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + \alpha Re^m (\epsilon/D)^n} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right]\}^2} \quad (5)$$

限制誤差範圍為 $\pm 1\%$ ，取最適化參數，得到  $m = 1/3$ ， $n = 2/3$ ， $\alpha = 1/6$ ，平均誤差在 $\pm 0.5\%$ 範圍內。亦即，摩擦係數  $f$  可以利用方程式(5)直接計算，且誤差在 $\pm 0.5\%$ 以內。表 1 中亦列出方程式(5)計算結果與方程式(1)之比較，由表 1 可知方程式(5)計算結果較其他簡化方程式結果與方程式(1)更接近。方程式(5)對於光滑管及粗糙管均適用，且能獲得相當準確摩擦係數  $f$ 。圖 4 為利用簡化方程式(5)計算結果與方程式(1)所得結果之比較，由圖中可發現方程式(5)計算所得結果誤差均控制在 $\pm 0.5\%$ 以內。將同樣處理方式，應用於 Swamee & Jain 的經驗式，如方程式(6)所示：

$$f = \frac{1}{\{-2 \times \log\left[\frac{5.74/Re^{0.9}}{1 + \alpha Re^m (\epsilon/D)^n} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right]\}^2} \quad (6)$$

限制誤差範圍為 $\pm 1\%$ ，無法取得最適化參數。限制誤差範圍為 $\pm 2\%$ ，取得最適化參數亦為  $m = 1/3$ ， $n = 2/3$ ， $\alpha = 1/6$ ，平均誤差在 $+2\% \sim -1\%$ 範圍內。亦即，摩擦係數也可以利用方程式(6)直接計算，且誤差在 $+2\% \sim -1\%$ 以內。圖 5 為利用簡化方程式(6)計算結果與方程式(1)所得結果之比較，由圖中可發現方程式(6)計算所得結果誤差均控制在 $+2\% \sim -1\%$ 以內。

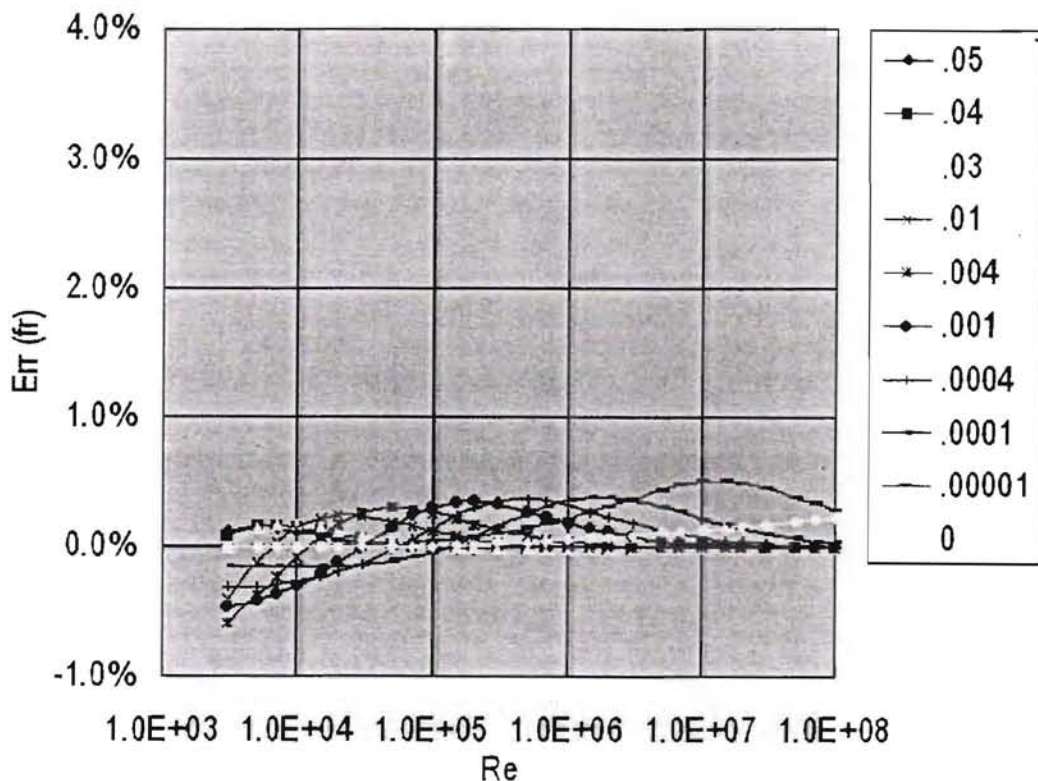


圖 4 方程式(5)計算所得摩擦係數計算誤差與雷諾數關係，圖中標記為粗糙度 $\epsilon/D$ 。

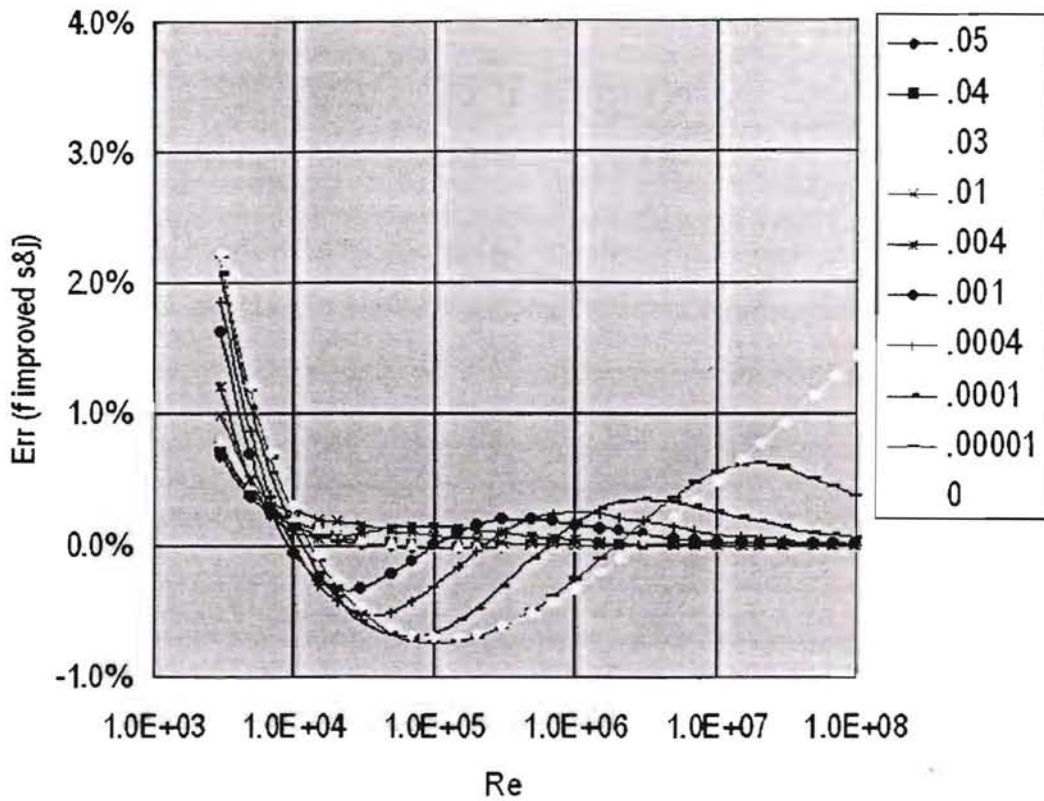


圖 5 方程式(6)計算所得摩擦係數計算誤差與雷諾數關係，圖中標記為粗糙度 $\epsilon/D$ 。

#### 摩擦係數計算邏輯與計算程式

流體在管中的流動，基本上可分為層流(Laminar)及紊流(Turbulent)兩大類。因此，計算摩擦係數時，可以採用以下策略：

1. 對於低雷諾數的情況( $Re \leq 2,200$ )，利用層流模式計算摩擦係數，直到與臨界點方程式相交為止。

$$f_{la} = 64 / Re \quad (7)$$

2. 由層流轉換為紊流的過度區，利用臨界區模式計算摩擦係數。一般而言，其使用範圍約在  $2,200 < Re < 5,235$  間。

$$f_c = 2.82 \times 10^{-7} \times Re^{1.5} \quad (8)$$

3. 紊流區，利用方程式(5)計算  $f_r$ 。

4. 決定策略：

甲、給定雷諾數  $Re$  及粗糙度參數  $\epsilon/D$ 。

乙、由方程式(5)、(7)、(8)，分別計算求出  $f_{la}$ 、 $f_c$ ，及  $f_r$ 。

丙、若  $f_{la} > f_c$ ，則  $f = f_{la}$ ；否則比較  $f_c$ ，及  $f_r$ 。

丁、若  $f_c > f_r$ ，則  $f = f_r$ ，否則  $f = f_c$ 。

依上述策略所撰寫試算表程式，如表 3 所示。使用者於 B8 及 C8 分別輸入  $Re$  及  $\epsilon/D$ ，然後在

D8、E8 及 F8 位置分別依照方程式(5)、(7)、(8)計算  $f_{la}$ 、 $f_c$ 、及  $f_r$ 。於 G8 中作邏輯判斷，填入 =IF(D8>E8,D8,IF(E8>F8,F8,E8))，作判斷決定適用方程式。複製第 8 列，並修改雷諾數 Re 及粗糙度參數  $\varepsilon/D$ ，即可計算對應之摩擦係數  $f$  值。利用這種方法計算所得摩擦係數與雷諾數關係圖，如圖 6 所示，即為所謂之穆迪圖(Moody's Chart)。

表 2 摩擦係數計算方法

| 編號 | 適用區                      | 方程式或計算邏輯   |
|----|--------------------------|--|
| 1  | 層流區 $Re \leq 2,200$      | $f_{la} = 64/Re$   |
| 2  | 過渡區 $2,200 < Re < 5,235$ | $f_c = 2.82 \times 10^{-7} \times Re^{1.5}$  |
| 3  | 紊流區 $Re > 4,000$         | $f_r = \frac{1}{\{-2 \times \log[\frac{95.00/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + \frac{1}{6} Re^{1/3} (\varepsilon/D)^{2/3}} + \frac{\varepsilon/D}{3.7}]\}^2}$ |
| 4  | 計算邏輯                     | 若 $f_{la} > f_c$ ，則 $f = f_{la}$ ；否則比較 $f_c$ 、及 $f_r$ 。<br>若 $f_c > f_r$ ，則 $f = f_r$ ，否則 $f = f_c$ 。  |

表 3 摩擦係數計算程式

|    | A    | B   | C  | D           | E           | F           | G               | H |
|----|------|---|--|-------------|-------------|-------------|-----------------|---|
| 1  |      |   |  |             |             |             |                 |   |
| 2  |      | $f_{la} =$  | $64/Re$  |             |             |             |                 |   |
| 3  |      | $f_c =$   | $2.82 \times 10^{-7} Re^{1.5}$   |             |             |             |                 |   |
| 4  |      | $f_r =$   | $\{-2 * \text{Log}[(95/Re^{0.983} - 96.82/Re)/(1 + Re^{1/3}(\varepsilon/D)^{2/3}/6) + (\varepsilon/D)/3.7]\}^{-2}$ |             |             |             |                 |   |
| 5  |      |   |  |             |             |             |                 |   |
| 6  |      | Reynolds No.  | Roughness  | Laminar     | Critical    | Turbulent   | Friction Factor |   |
| 7  |      | Re  | $\varepsilon/D$  | $f_{la}$    | $f_c$       | $f_r$       | $f$             |   |
| 8  |      | 1000  | 0.05   | 6.40000E-02 | 8.91762E-03 | 9.02359E-02 | 6.40000E-02     |   |
| 9  |      | 2000  | 0.05   | 3.20000E-02 | 2.52228E-02 | 8.18644E-02 | 3.20000E-02     |   |
| 10 |      | 3000  | 0.05   | 2.13333E-02 | 4.63373E-02 | 7.87340E-02 | 4.63373E-02     |   |
| 11 |      | 4000  | 0.05   | 1.60000E-02 | 7.13410E-02 | 7.70752E-02 | 7.13410E-02     |   |
| 12 |      | 5000  | 0.05   | 1.28000E-02 | 9.97021E-02 | 7.60427E-02 | 7.60427E-02     |   |
| 13 |      | 10000   | 0.05   | 6.40000E-03 | 2.82000E-01 | 7.38737E-02 | 7.38737E-02     |   |
| 14 |      | 100000  | 0.05   | 6.40000E-04 | 8.91762E+00 | 7.17728E-02 | 7.17728E-02     |   |
| 15 |      | 1000000   | 0.05   | 6.40000E-05 | 2.82000E+02 | 7.15680E-02 | 7.15680E-02     |   |
| 16 |      | 10000000  | 0.05   | 6.40000E-06 | 8.91762E+03 | 7.15518E-02 | 7.15518E-02     |   |
| 17 |      | 1000  | 0  | 6.40000E-02 | 8.91762E-03 | 6.25474E-02 | 6.40000E-02     |   |
| 18 |      | 2000  | 0  | 3.20000E-02 | 2.52228E-02 | 4.94454E-02 | 3.20000E-02     |   |
| 19 |      | 3000  | 0  | 2.13333E-02 | 4.63373E-02 | 4.35188E-02 | 4.35188E-02     |   |
| 20 |      | 4000  | 0  | 1.60000E-02 | 7.13410E-02 | 3.99077E-02 | 3.99077E-02     |   |
| 21 |      | 5000  | 0  | 1.28000E-02 | 9.97021E-02 | 3.73935E-02 | 3.73935E-02     |   |
| 22 |      | 10000   | 0  | 6.40000E-03 | 2.82000E-01 | 3.08827E-02 | 3.08827E-02     |   |
| 23 |      | 100000  | 0  | 6.40000E-04 | 8.91762E+00 | 1.79907E-02 | 1.79907E-02     |   |
| 24 |      | 1000000   | 0  | 6.40000E-05 | 2.82000E+02 | 1.16516E-02 | 1.16516E-02     |   |
| 25 |      | 10000000  | 0  | 6.40000E-06 | 8.91762E+03 | 8.11363E-03 | 8.11363E-03     |   |
| 26 |      |   |  |             |             |             |                 |   |
| 27 | D8填入 | =64/\$B8  |  |             |             |             |                 |   |
| 28 | E8填入 | =0.000000282*\$B8^1.5   |  |             |             |             |                 |   |
| 29 | F8填入 | =(-2*LOG((95/\$B8^0.983-96.82/\$B8)/(1+\$B8^(1/3)*C8^0.66/6)+C8/3.7))^2 |  |             |             |             |                 |   |
| 30 | G8填入 | =IF(D8>E8,D8,IF(E8>F8,F8,E8))   |  |             |             |             |                 |   |



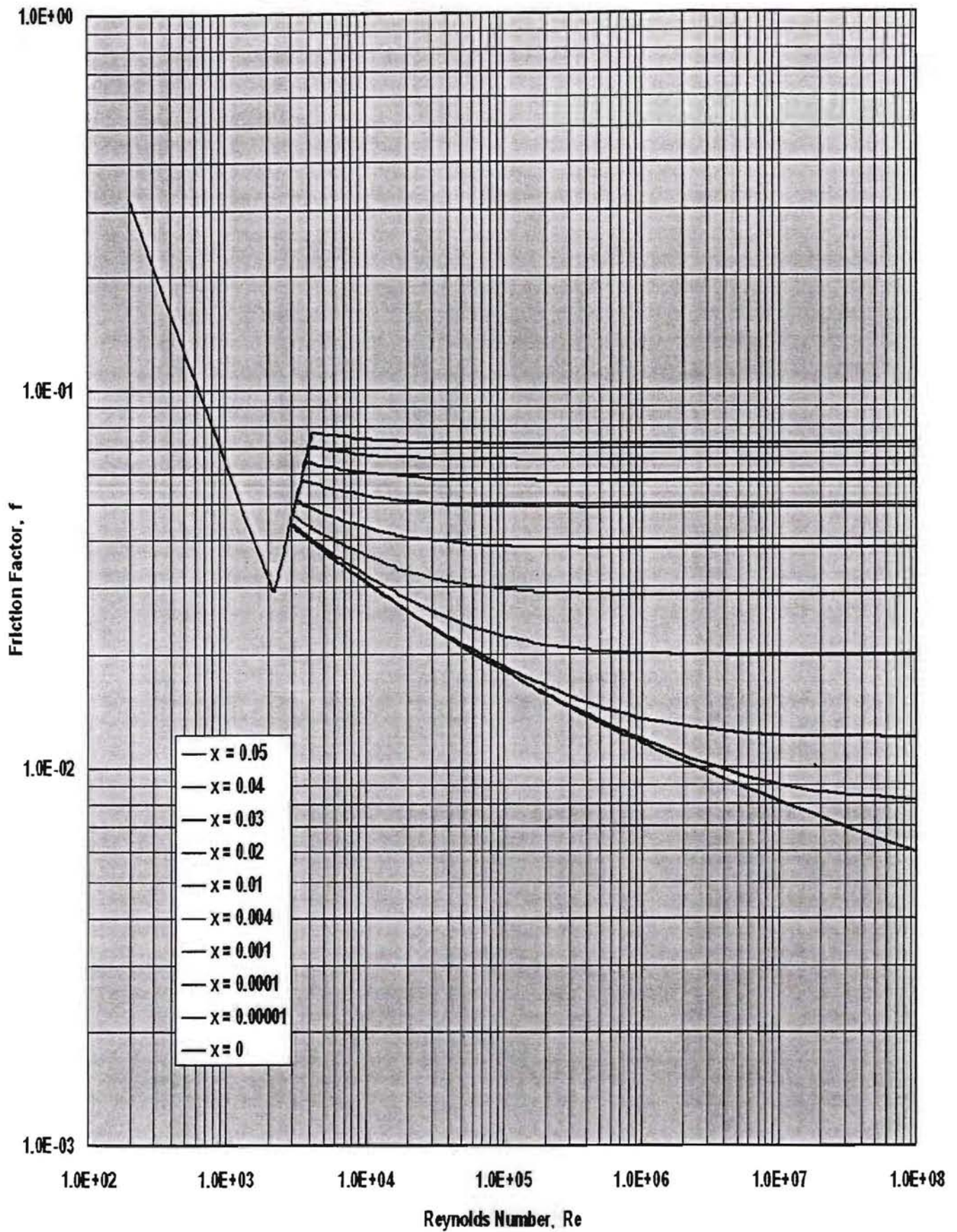


圖 6 利用方程式(5)及本文簡化計算邏輯，可以很快速的建立穆迪摩擦係數圖。圖中標記為粗糙度係數 $\xi=\epsilon/D$ 。(本圖由 Excel 程式產生)



速算圖表及數值方法

(1) 已知 $\Delta P$  及 $\Delta Z$  求速度  $V$

利用勃努利方程式執行流體流動系統之計算時，若已知 $\Delta P$  及 $\Delta Z$ ，欲求速度  $V$  的值。可以利用  $f Re^2$  對  $Re$  作圖(如圖 7)，由已知系統參數  $D, \rho, \mu, \Delta P$  及 $\Delta Z$  求得  $f Re^2$  值(利用方程式 9)，再利用圖 7 查圖得到  $Re$  值，即可快速計算出速度  $V = Re \mu / D \rho$ 。

$$f Re^2 = \{(p_2 - p_1) + \rho(z_2 - z_1)g\} \frac{\rho D^3}{\frac{1}{2} L \mu^2} \quad (9)$$

若要求得更準確的  $Re$  值，亦可令  $C = f Re^2$ ，然後代入方程式(5)，整理得目標函數  $F(Re) = 0$ ，並利用牛頓拉福森割線法求解  $Re$ 。

$$F(Re) = 0 = Re + 2\sqrt{C} \log\left[\frac{95/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + Re^{1/3}(\epsilon/D)^{2/3}/6} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right] \quad (10)$$

其中  $Re$  可以利用方程式(8)作起始值，得到  $Re = (C/2.87E-7)^{1/3.5}$ 。求解方程式(10)時，可以利用牛頓割線法得到  $Re_{j+1} = Re_j - F(Re_j)/F'(Re_j)$ ，其中  $Re_j$  為第  $j$  次計算值((3))。一般而言，利用牛頓拉福森割線法求解  $Re$  只要 3 至 4 次迭代，即可收斂。如表 4 所示。

表 4 利用方程式(10)求解  $Re$  之實例

|    | A  | B    | C             | D         | E           | F           | G         | K         | O         | S         | W         |
|----|--|------|---------------|-----------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 2  |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 3  | $F(Re) = 0 = Re + 2\sqrt{C} \log\left[\frac{95/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + Re^{1/3}(\epsilon/D)^{2/3}/6} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right]$ |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 4  |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 5  |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 6  |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 7  | C  | e/D  | Initial Trial |           |             |             | #2        | #3        | #4        | #5        | #6        |
|    |  |      | Re            | Re+dRe    | F(Re)       | F(Re+dRe)   | Re New    | Re New    | Re New    | Re New    | Re New    |
| 8  | 1000000  | 0.05 | 3,851.62      | 3,851.66  | 2.5487E+02  | 2.5491E+02  | 3,588.36  | 3,587.90  | 3,587.80  | 3,587.80  | 3,587.80  |
| 9  | 5000000  | 0.05 | 6,100.27      | 6,100.33  | -2.0485E+03 | -2.0484E+03 | 8,214.99  | 8,198.85  | 8,198.85  | 8,198.85  | 8,198.85  |
| 10 | 10000000   | 0.05 | 7,436.31      | 7,436.38  | -4.1371E+03 | -4.1370E+03 | 11,705.13 | 11,659.07 | 11,659.07 | 11,659.07 | 11,659.07 |
| 11 | 50000000   | 0.05 | 11,777.77     | 11,777.89 | -1.4296E+04 | -1.4296E+04 | 26,505.06 | 26,270.39 | 26,270.38 | 26,270.38 | 26,270.38 |
| 12 | 100000000  | 0.05 | 14,357.26     | 14,357.41 | -2.2605E+04 | -2.2605E+04 | 37,624.32 | 37,220.99 | 37,220.97 | 37,220.97 | 37,220.97 |
| 13 | 1000000  | 0.01 | 3,851.62      | 3,851.66  | -6.5264E+02 | -6.5260E+02 | 4,579.57  | 4,570.10  | 4,570.09  | 4,570.09  | 4,570.09  |
| 14 | 5000000  | 0.01 | 6,100.27      | 6,100.33  | -4.3436E+03 | -4.3435E+03 | 11,030.90 | 10,901.68 | 10,901.48 | 10,901.48 | 10,901.48 |
| 15 | 10000000   | 0.01 | 7,436.31      | 7,436.38  | -7.5270E+03 | -7.5269E+03 | 16,035.85 | 15,518.17 | 15,517.63 | 15,517.63 | 15,517.63 |
| 16 | 50000000   | 0.01 | 11,777.77     | 11,777.89 | -2.2520E+04 | -2.2520E+04 | 37,800.06 | 35,524.50 | 35,522.10 | 35,522.10 | 35,522.10 |
| 17 | 100000000  | 0.01 | 14,357.26     | 14,357.41 | -3.4565E+04 | -3.4564E+04 | 54,421.73 | 50,548.00 | 50,544.40 | 50,544.40 | 50,544.40 |
| 18 |  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 19 | D8位置填入 =C8*(1+0.00001)   |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 20 | E8位置填入 =C8+2*SQR(\$A8)*LOG((95/C8^0.983-96.82/C8)/(1+C8^(1/3)*\$B8^(2/3)/6)+\$B8/3.7)  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 21 | F8位置填入 =D8+2*SQR(\$A8)*LOG((95/D8^0.983-96.82/D8)/(1+D8^(1/3)*\$B8^(2/3)/6)+\$B8/3.7)  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 22 | G8位置填入 =C8-E8*(D8-C8)/(F8-E8)  |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |
| 23 | 複製D8..G8至H..KB，餘此類推。   |      |               |           |             |             |           |           |           |           |           |



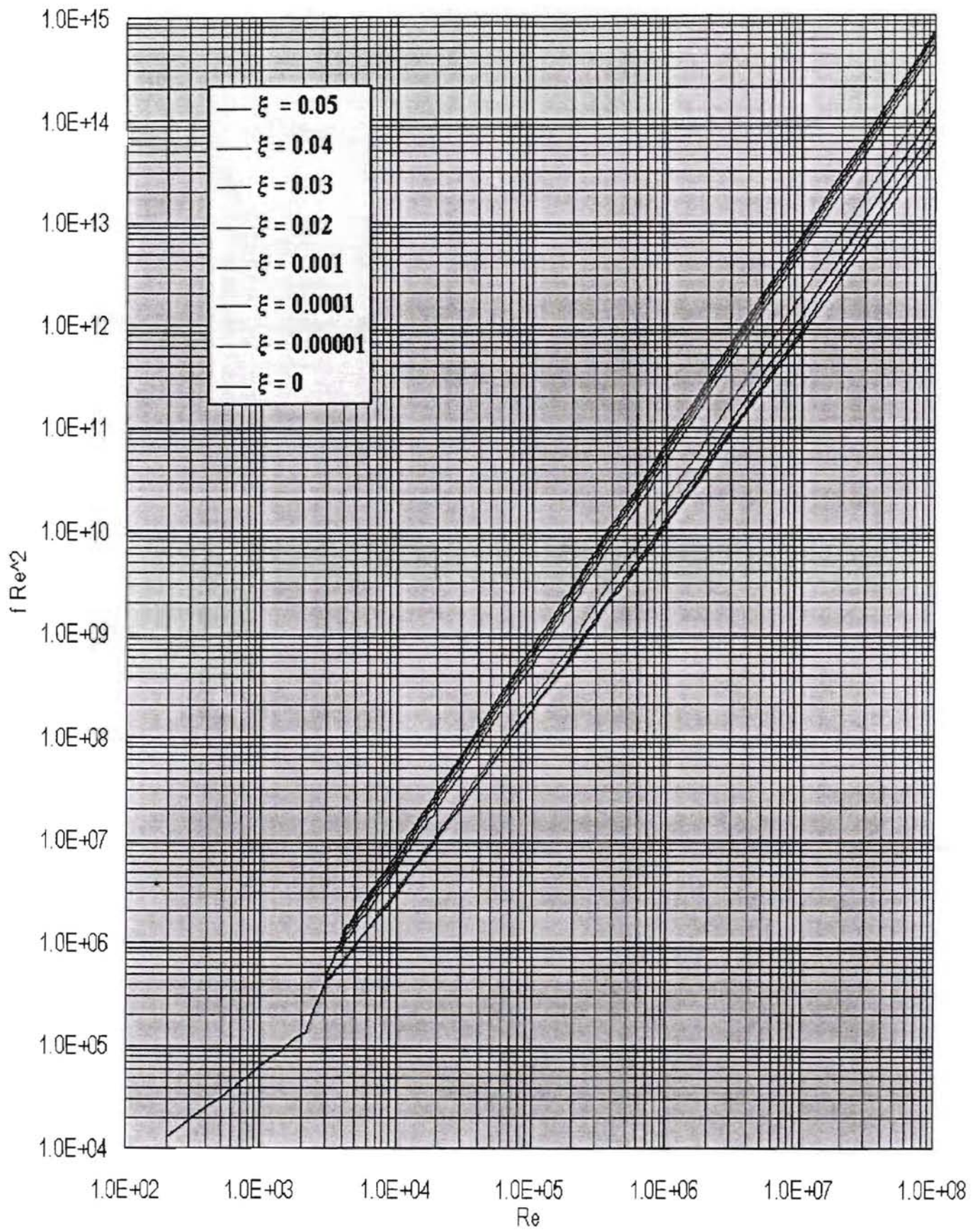


圖 7 利用方程式(5)及本文簡化計算邏輯，建立之  $f Re^2$  對  $Re$  作圖。

圖中標記為粗糙度係數  $\xi = \varepsilon/D$ 。用於已知  $\Delta P$  及  $\Delta Z$ ，求速度  $v$ 。



(2) 已知 $\Delta P$  及速度  $V$  求管徑  $D$

同理，若已知 $\Delta P$  及速度  $V$ ，要求管徑  $D$ ，可以利用  $f Re^{-1}$  對  $Re$  作圖(如圖 8)，由系統參數  $\rho \cdot \mu \cdot \Delta P$  及速度  $V$ ，利用方程式(11)求得  $f Re^{-1}$  值，查圖得到  $Re$  值，快速計算出管徑  $D = Re \mu / V \rho$ 。

$$C = f Re^{-1} = \{(p_2 - p_1) + \rho(z_2 - z_1)g\} \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho^2 V^3 L} \quad (11)$$

或以數值解法，求解下列方程式

$$F(D) = 0 = \sqrt{Re} + 2\sqrt{C} \log\left[\frac{95/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + Re^{1/3}(\epsilon/D)^{2/3}/6} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right] \quad (12)$$

$$Re = \frac{DV\rho}{\mu}$$

方程式(12)為含有直徑  $D$  之非線性方程式。針對特定管材，先決定粗糙度  $\epsilon$  值。求解方程式(12)時，可以利用牛頓割線法得到  $D_{j+1} = D_j - F(D_j)/F'(D_j)$ ，其中  $D_j$  為第  $j$  次計算值((3))。

(3) 已知 $\Delta P$  及流速  $Q$  求管徑  $D$

若已知 $\Delta P$  及流速  $Q$ ，要求管徑  $D$ ，可以利用  $f Re^5$  或  $Re f^{1/5}$  對  $Re$  作圖(如圖 9)，由  $Re f^{1/5}$  值，查圖得到  $Re$  值，快速計算出管徑  $D = Re \mu / V \rho$ 。

$$C = f Re^5 = 128\{(p_2 - p_1) + \rho(z_2 - z_1)g\} \frac{\rho^4 Q^3}{\pi^3 \mu^5 L} \quad (13)$$

或以數值解法，求解下列方程式

$$F(D) = 0 = Re^{5/2} + 2\sqrt{C} \log\left[\frac{95/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + Re^{1/3}(\epsilon/D)^{2/3}/6} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right] \quad (14)$$

$$Re = \frac{4Q\rho}{\pi D\mu}$$

結論

計算流體在管線中流動所產生的壓力差、或計算流速等，都需要先估算摩擦係數。習慣上，通常使用查表或查圖方式得到摩擦係數值。Colebrook and White 的摩擦係數一般方程式為摩擦係數之隱函數，通常需要利用數值方法求解，或利用圖表查圖，供計算使用。近年來因試算表運用的普及，Manadili 乃提出二項簡化式，但其缺點是在粗糙度高及雷諾數低時，誤差較大。本文根據實際運算分析，提出一修正的簡化經驗式

$$f = \frac{1}{\left\{-2 \times \log\left[\frac{95.00/Re^{0.983} - 96.82/Re}{1 + \frac{1}{6} Re^{1/3}(\epsilon/D)^{2/3}} + \frac{\epsilon/D}{3.7}\right]\right\}^2}$$

此方程式中只含雷諾數及管線粗糙度，適合使用試算表快速且準確的計算求得摩擦係數值，其計算誤差在 $\pm 0.5\%$ 以內。文中並建立運算邏輯與簡化圖表，可以簡單且正確的計算摩擦係數及管線內流體流動問題的計算。

#### 參考文獻

1. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory"; McGraw Hill, 1968。
2. Perry, R. H., and Green, D. W., "Perry's Chemical Engineer's Handbook"; 7<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, 1997。
3. 張榮興，"Visual Basic 高級工程應用"，豐映科技股份有限公司，2001。
4. Miller, D. S., "Internal Flow Systems", British Hydromechanics Research Association, Fluid Engineering, Cranfield, Bedford, UK, p.132, 1978。
5. Manadili, G., "Replace Implicit Equations with Signomial Functions", Chemical Engineering, pp. 129-132, Aug, 1997。



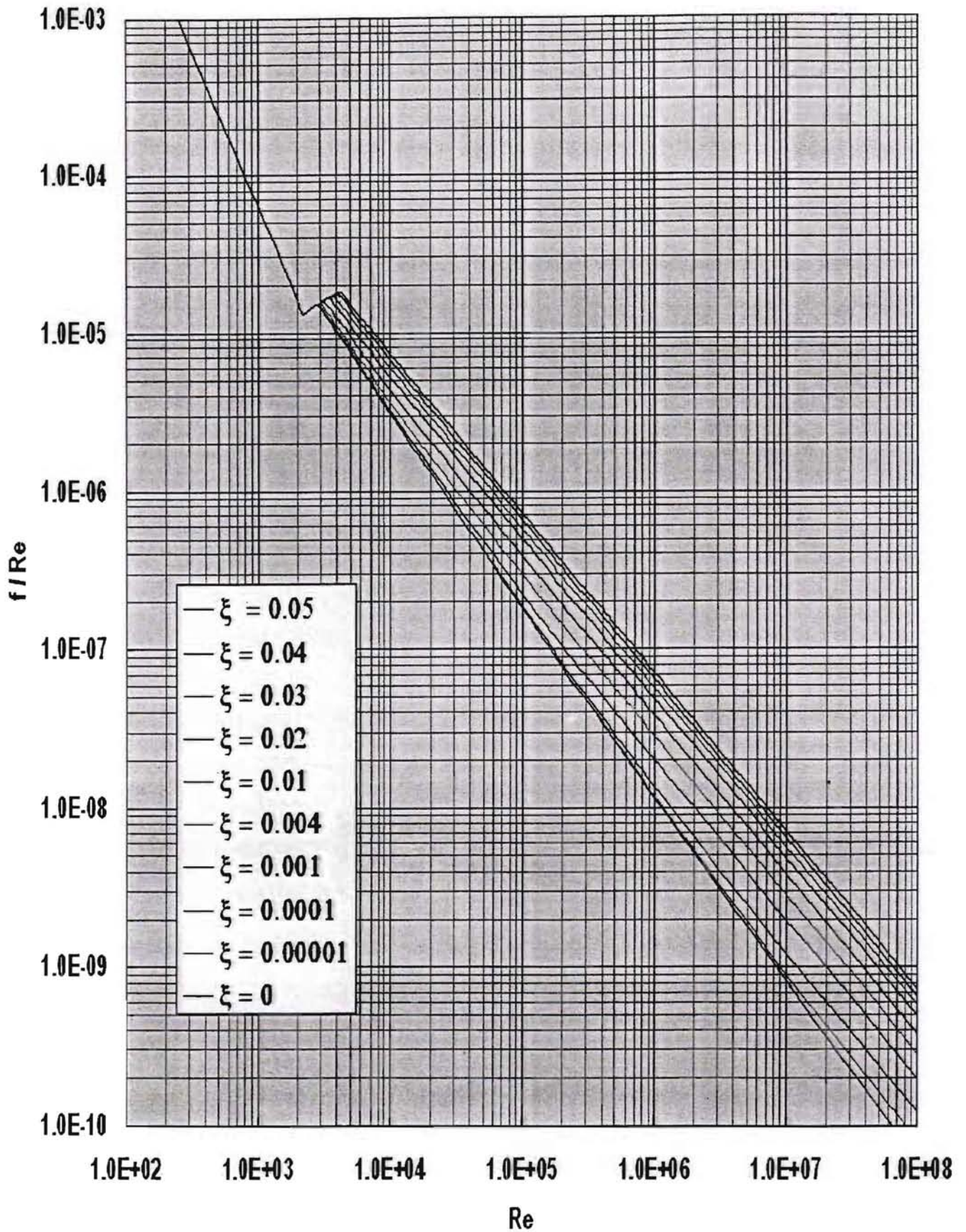


圖 8 利用方程式(5)及本文簡化計算邏輯，建立之  $f/Re$  對  $Re$  作圖。

圖中標記為粗糙度係數  $\xi = \epsilon/D$ 。用於已知  $\Delta P$  及速度  $v$ ，求管徑  $D$ 。



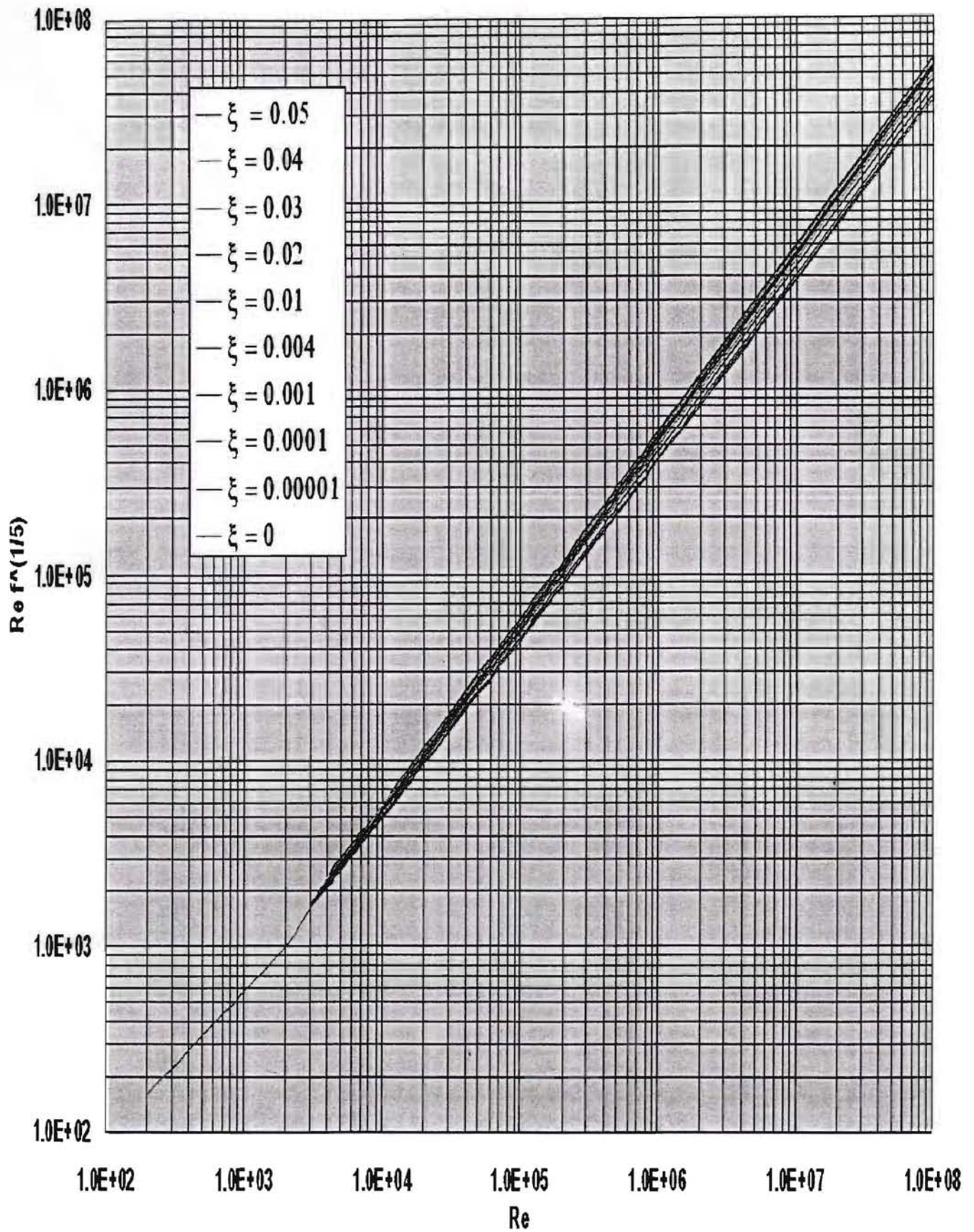


圖 9 利用方程式(5)及本文簡化計算邏輯，建立之  $f/Re$  對  $Re$  作圖。  
圖中標記為粗糙度係數  $\xi = \epsilon/D$ 。用於已知  $\Delta P$  及流速  $Q$ ，求管徑  $D$ 。



## 作者簡介

張榮興

台灣大學化學工程學系 學士(1978) 碩士(1981) 博士(1987)

現任 豐映科技股份有限公司總經理

采利環工股份有限公司董事長

經歷 工業技術研究院能源與資源研究所工程技術組組長

台灣大學化工系講師

中原大學化工系兼任副教授

元智大學化工所兼任副教授

采利環工股份有限公司總經理

專長 工程管理、整廠設計、特殊裝置設計、污染防治、資源再生、焚化技術

聯絡 [resi@ms13.hinet.net](mailto:resi@ms13.hinet.net) [resi1689@giga.net.tw](mailto:resi1689@giga.net.tw)